BREVET DE TECHNICIEN

TOPOGRAPHE

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

Durée : 3h **Coefficient : 5**

- SUJET -

Dès la remise du sujet, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 2 exercices et 1 problème indépendants.

Un formulaire de 3 pages est joint au sujet.

Il sera tenu compte de la présentation.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : (5 points)

Pour tout x de $\mathbf{R}$, on définit le polynôme $P(x)$ par :

$$P(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3 .$$

1) a) Calculer $P(3)$.

b) En déduire qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbf{R}$:

$$P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c) .$$

Déterminer a, b et c.

2) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation :

$$4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$$

3) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'équation :

$$4(\cos x)^3 - 12(\cos x)^2 - \cos x + 3 = 0$$

4) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation :

$$4(\ln x)^3 - 12(\ln x)^2 - \ln x + 3 = 0$$

Exercice 2 : (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 *cm*,

on considère la conique C d'équation $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$.

1) Quelle est la nature de C ? Préciser les coordonnées de ses sommets et de ses foyers.

2) Tracer la conique C dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3) La droite d'équation $y = 2$ coupe la conique C en deux points M et N.

(N est le point d'abscisse positive).

a) Déterminer les coordonnées exactes de M et N.

b) Soit Q le point de coordonnées $(0;-3)$.

Ce point est-il situé sur la conique C ? justifier.

Calculer l'aire en cm^2 du triangle MNQ.

On en donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au centième de cm^2.

Problème : (11 points)

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-4e^{x}+3x$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ **d'unité graphique 2 *cm*.**

1. Limites de la fonction.
   a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en montrant que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme
   $$f(x)=e^{x}\left(\frac{1}{2}e^{x}-4\right)+3x.$$

2. Asymptote à (C)
   a) Montrer que la courbe (C) a pour asymptote la droite (D) d'équation $y=3x$.
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) avec la droite (D).
   c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote (D).

3. Variations de f
   f' est la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$ et vérifier qu'elle peut s'écrire $f'(x)=(e^{x}-1)(e^{x}-3)$.
   b) Résoudre l'équation $f'(x)=0$ et déterminer le signe de $f'(x)$.
   c) Construire le tableau de variations de la fonction f.
   Préciser les extremums.

4. Construction graphique
   a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x=\ln 2$.
   b) Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les droites (D) et (T) puis la courbe (C).

5. Calcul d'une aire
   a) Calculer $I=\int_{0}^{3\ln 2}(3x-f(x))dx$.
   b) En déduire la mesure, en cm^2, de l'aire comprise entre la droite (D), la courbe (C), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=3\ln 2$.(on rappelle que ln 8 =3 ln 2).

BREVET DE TECHNICIEN
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Ce formulaire concerne les brevets de techniciens préparés en deux ans après la seconde de détermination.

I. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1+b+b^2+\cdots+b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $S_n = n+1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

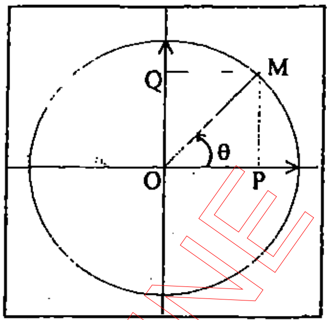
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

D. *TRIGONOMÉTRIE*



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a)$; $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$

II. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n, n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. CALCUL INTÉGRAL

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$,

alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2 y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$